

## **Lesson Plan Berbasis Kerangka Kerja ELPSA untuk Membangun Pemahaman Konsep Penjumlahan dan Pengurangan Bilangan Bulat pada Siswa**

**Arifin**

Widyaiswara Madya LPMP NTB

Email: arifin\_efo@yahoo.com

**Abstract:** Cultivation of addition and subtraction of integers that conducted by math teacher at SMP used abstract way. Consequently, not all students understood about that concept. Student's understandable occurred because teacher only gave information about how to operate addition and subtraction without showing the process. This way was not guarantee that could be improving students understanding. In order to cultivate students understanding, it needed to arrange a learning framework that given student's chance in manipulating object. Using lesson plan gave students chance to construct experiences became skills. The learning framework is one of ELPSA framework that adapted from constructive learning theory and social. ELPSA is acronym of Experience, Language, Picture, Symbolic, Application. Liebeck (1984) in Tom Lowrie & Sitti Maesuri Patahuddin said that making math concept has understanding through ELPSA framework. Steps of conducting began with Experience (from student's experience); Language (language that describing experience), Picture (picture of experience); Symbols (symbol of general experience); and Application (describe of getting experience that implemented another situations). Student's framework would: (1) able to use language or explain something that have been conducted, (2) able to give example and not adopt, (3) able to serve concept in mathematics representative form, (4) able to use, utilize, and choose specific procedure, and (5) able to apply concept or algorithm in problem solving.

**Abstrak:** Penanaman konsep penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat yang dilakukan guru matematika di SMP selalu diberikan dengan cara abstrak. Akibatnya tidak semua siswa memahami dengan baik konsep tersebut. Ketidakhahaman siswa terjadi karena guru hanya menginformasikan cara melakukan operasi penjumlahan dan pengurangan tanpa menunjukkan proses. Cara demikian tidak menjamin dapat meningkatkan pemahaman siswa. Oleh sebab itu, dalam usaha menanamkan pemahaman siswa perlu dirancang pembelajaran yang memberi kesempatan siswa memanipulasi obyek. Dengan kerangka pembelajaran demikian siswa akan memperoleh kesempatan untuk mengkonstruksi pengalaman sehingga menjadi pengetahuannya. Kerangka pembelajaran tersebut salah satunya adalah kerangka kerja ELPSA yang diadaptasi dari teori belajar konstruktivis dan sifatnya sosial. ELPSA merupakan akronim dari *Experience, Language, Picture, Symbolic, Application*. Liebeck (1984) dalam Tom Lowrie & Sitti Maesuri Patahuddin mengatakan bahwa pembentukan konsep matematika yang mengarah kepada pemahaman dapat dilakukan melalui kerangka kerja ELPSA. Tahapan pelaksanaan dilakukan dengan urutan *Experience* (dimulai dari pengalaman siswa); *Language* (bahasa yang mendeskripsikan pengalaman), *Picture* (gambar yang menyajikan pengalaman); *Symbols* (Simbol tertulis yang menyatakan pengalaman secara umum atau bersifat general); dan diperluas dengan tahapan *Application* (yang menggambarkan bagaimana pengetahuan yang diperoleh dapat diterapkan dalam berbagai situasi). Dengan kerangka kerja tersebut siswa akan: (1) mampu menggunakan bahasa atau menjelaskan kembali sesuatu yang telah dilakukannya, (2) mampu memberi contoh dan bukan di contoh, (3) mampu menyajikan konsep dalam berbagai bentuk representasi matematis, (4) mampu menggunakan, memanfaatkan, dan memilih prosedur tertentu, dan (5) mampu mengaplikasikan konsep atau algoritma pada pemecahan masalah.

**Kata kunci:** ELPSA, pemahaman, penjumlahan dan pengurangan .

### **Pendahuluan**

Sekolah Menengah Pertama (SMP) merupakan tempat pertama siswa berpikir secara formal dalam mempelajari konsep-konsep matematika. Oleh karena itu, guru yang mengajar matematika di SMP harusnya

mampu membelajarkan konsep matematika dengan benar dan mudah difahami siswa. Dengan pembelajaran yang menyenangkan akan membuat aktivitas siswa meningkat dan motivasi belajar menjadi tinggi. Namun demikian, bagi siswa kelas VII SMP

walaupun berada pada tahap berpikir formal, tetapi mereka baru beralih dari Sekolah Dasar (SD) dimana tahap berpikir siswa berada pada tahap konkret (Jean Piaget dalam Russefendi, 1996:223). Oleh karena itu, pembelajaran matematika pada tahap awal di SMP tidak selamanya dilakukan secara formal, tetapi sedapat mungkin dilakukan dengan bantuan material manipulatif.

Pembelajaran matematika yang dilakukan guru di SMP sering disajikan berupa sederetan langkah-langkah atau prosedur. Siswa diminta menghafalkan prosedur tersebut kemudian dilatih menggunakannya untuk menyelesaikan soal. Dengan cara demikian siswa hanya dapat mengerjakan soal-soal yang serupa dengan yang dilatihkan. Tobin dan Jokubowsky (dalam Etcberger dan Shaw, 1992) menyatakan “pengalaman di kelas mengindikasikan bahwa penalaran dan pemahaman yang mengandalkan penggunaan algoritma masih belum cukup dan masih menghawatirkan kemampuan siswa dalam menguasai pengerjaan hitung”. Sering guru percaya bahwa siswa telah memahami suatu konsep tertentu apabila dapat mengerjakan soal rutin, padahal kenyataan mereka dapat mengerjakan soal hanya karena ingat prosedur pengerjaan yang dilatihkan di kelas. Dengan demikian, kemampuan mengerjakan soal bagi seorang siswa tidak menjamin bahwa mereka telah menguasai konsep dengan baik. Untuk itu, pembelajaran matematika di SMP hendaknya tidak dilakukan secara abstrak, tetapi sedapat mungkin pembelajaran dimulai dari konkret ke abstrak, dari hal-hal yang mudah ke sulit, atau dari sederhana ke kompleks.

Piaget (dalam Ruseffendi 1996: 223) berpendapat bahwa “siswa yang tahap berpikirnya ada pada tahap operasi konkret yaitu tahapan umur pada usia SD atau SMP awal (kelas VII) tidak akan dapat memahami operasi (logis) dalam konsep matematika tanpa dibantu oleh manipulasi benda-benda konkret”. Disamping itu guru harus memperhatikan hirarki pembelajaran yang menekankan prasyarat-prasyarat tertentu untuk memahami konsep-konsep tertentu.

Berdasarkan uraian di atas, penulis mencoba mengamati model pembelajaran yang dilakukan 5 orang guru SMP di kota Mataram dan kabupaten Lombok Barat yang sedang mengajarkan konsep pengurangan bilangan bulat dan penjumlahan pecahan. Hasil pengamatan menunjukkan bahwa guru dalam menyajikan konsep pengurangan bilangan bulat hanya mengenalkan dengan cara menginformasikan bahwa mengurangkan dua bilangan bulat sama artinya dengan menjumlahkan dengan lawannya tanpa menunjukkan mengapa demikian dan tanpa membantunya dengan peragaan atau pola-pola tertentu. Demikian juga halnya dengan konsep penjumlahan pecahan. Guru hanya mengenalkannya dengan cara menyamakan penyebut pecahan dengan menggunakan Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK) tanpa menunjukkan dengan peragaan. Berdasarkan pengamatan tersebut penulis menelusuri aktivitas belajar siswa baik pada kegiatan kelompok maupun kegiatan individu. Ternyata banyak siswa yang tidak memperhatikan proses pembelajaran, jarang mengajukan pertanyaan baik pada guru maupun sesama siswa, malu-malu menjawab pertanyaan guru, pada kegiatan kelompok siswa hanya menyelesaikan soal (masalah)

sendiri-sendiri, dan siswa kurang mampu mengkomunikasikan pengetahuan yang diperoleh kepada teman-temannya yang lain.

Kenyataan di atas mengindikasikan bahwa model, strategi, pendekatan dan metode yang digunakan guru dalam pembelajaran belum mampu mengkondisikan siswa untuk terlibat secara aktif dalam proses pembelajaran. Oleh karena itu, dalam tulisan ini penulis mencoba mengenalkan kerangka kerja ELPSA yang dilandasi teori belajar konstruktivis yang memberi kesempatan guru berinovasi dalam merancang dan menerapkan pembelajaran yang membuka kesempatan siswa untuk terlibat secara aktif dalam proses pembelajaran matematika.

Berdasarkan latar belakang yang dikemukakan maka pertanyaan yang diajukan dalam tulisan ini adalah bagaimana skenario rancangan pembelajaran dengan kerangka kerja ELPSA untuk membangun pemahaman siswa dalam pembelajaran penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat di SMP/MTs?. Tujuan yang diharapkan agar guru matematika dapat merancang pembelajaran yang menggunakan kerangka kerja ELPSA dan menerapkannya sebagai alternatif pembelajaran matematika dalam membangun pemahaman konsep, atau prinsip matematika pada siswa SMP/MTs.

Telah diuraikan sebelumnya, bahwa pembelajaran matematika (penjumlahan dan pengurangan) yang dilakukan guru matematika SMP sering disajikan berupa sederetan langkah-langkah atau prosedur. Penulis berasumsi bahwa hal ini terjadi karena rancangan pembelajaran yang dikembangkan guru tidak memberi kesempatan siswa untuk terjadinya pembelajaran yang interaktif, inspiratif, menyenangkan, menantang dan memotivasi seperti yang diamanatkan oleh Standar Proses (Kemendikbud, 2013). Akibatnya prestasi belajar siswa di beberapa SMP/MTs masih banyak yang belum memenuhi kriteria ketuntasan minimal (KKM) yang ditetapkan sekolah khususnya pada materi/topik penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat.

Sebagai contoh, berikut ini disajikan hasil evaluasi yang dilakukan team peneliti Universitas Canberra Australia kerjasama dengan IKIP Mataram, LPMP NTB, Dikpora NTB dan Kanwil Kemenag NTB tentang pemahaman siswa pada penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat terhadap 14 orang siswa di salah satu SMP di kota Mataram. Adapun jawaban siswa tersebut seperti berikut.

Integer	answer	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14
3+4	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	5	7	7	7
(-4)+3	-1	-7	-7	-7	8	-7	-7	-7	-1	-7	7	-1	-1	-1	-1
-3+4	1	-7	-7	-7	6	-7	-7	-7	-1	1	-7		-1	1	1
4-(-3)	7	-1	7	7	1	-1	-1	1	-1	1	-2	-1	7	-1	1
3-4	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0	-1	1	-1
3-(-4)	7	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-7	7		7	-1	-1
4-3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3+(-4)	-1	-7	-7	7	0	-7	-7	1	1	-1		-1	-7	-1	-1

Keterangan: warna hijau : jawaban benar  
 warna kuning : jawaban salah

Dari jawaban yang diberikan, hanya ada sekitar 14 % siswa yang mampu menyelesaikan penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat dengan nilai baik. Pemahaman tentang konsep penjumlahan dan pengurangan juga sangat lemah. Siswa tidak mampu membedakan tanda bilangan dengan operasi bilangan. Disamping itu kemampuan menerapkan definisi dan sifat-sifat operasi penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat sangat lemah dan sebagian besar siswa beranggapan bahwa penjumlahan bilangan positif dengan bilangan negatif adalah negatif atau sebaliknya.

Dari kenyataan yang ada, penulis berasumsi bahwa pembelajaran yang dilakukan guru hanya dengan informasi dan disajikan berupa sederetan langkah-langkah atau prosedur, kemudian siswa diminta menghafalkan prosedur tersebut serta dilatih menggunakannya untuk menyelesaikan soal. Disamping itu, guru kurang memberi kesempatan siswa untuk memanipulasi material-material manipulatif atau visualisasi gambar-gambar, mencermati pola-pola penjumlahan atau pengurangan sehingga penekanan pemahaman siswa pada definisi atau sifat-sifat penjumlahan kurang diprioritaskan. Ada kemungkinan, hal ini terjadi karena skenario pembelajaran yang dirancang guru kurang memberi kesempatan siswa untuk terjadinya interaksi, kreatifitas dan motivasi pada siswa. Untuk itu penulis mencoba menguraikan kerangka kerja ELPSA untuk membantu guru matematika merancang pembelajaran yang dapat membangun pemahaman siswa dalam rangka meningkatkan prestasi belajarnya.

## **Pembahasan**

Kerangka kerja ELPSA dikembangkan oleh Liebeck, P (1984) yang diilhami dari teori-teori belajar konstruktivis dan sifatnya sosial. Tom Lowre & Sitti Maesuri (2015:3-4) menjelaskan bahwa kerangka kerja ELPSA adalah pendekatan perancangan pembelajaran yang sifatnya bersiklus. Namun demikian, penting untuk diingat bahwa ELPSA bukan proses yang linear, karena pembelajaran adalah proses kompleks yang tidak dapat diprediksi sepenuhnya dan tidak terjadi dalam urutan linear. Dengan demikian, elemen-elemen dari model ELPSA dapat dilihat sebagai elemen-elemen yang saling berhubungan dan melengkapi. Rancangan ini menyajikan ide-ide matematika melalui pengalaman-pengalaman hidup, percakapan matematika, rangsangan visual, notasi simbol, dan aplikasi pengetahuan. Dalam rancangan pembelajaran ini, guru diharapkan mengenalkan konsep memulai dari apa yang diketahui siswa dengan urutan rancangan seperti berikut.

Komponen pertama dari proses perancangan pembelajaran adalah **pengalaman**. Pengalaman mempertimbangkan bagaimana para siswa menggunakan matematika selama ini, konsep apa saja yang mereka ketahui, bagaimana mereka dapat memperoleh informasi, dan bagaimana matematika itu telah dialami oleh siswa baik di dalam maupun di luar kelas. Komponen pengalaman juga melibatkan asesmen karena guru perlu mengetahui apa yang telah diketahui oleh siswa dan informasi baru apa yang perlu dikenalkan guna membantu pemahaman siswa tersebut. Oleh karena itu, komponen pertama dari ELPSA dapat

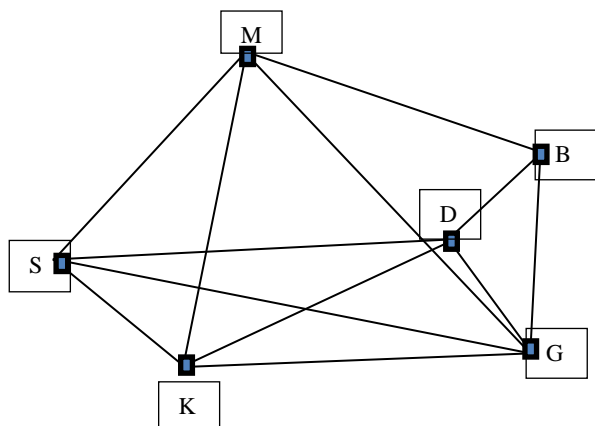
dikenalkan melalui curah pendapat, diskusi secara umum, menggunakan visual untuk memancing pemikiran, penyajian cerita oleh guru ataupun siswa. Sebagai konsekuensinya, pengalaman juga berhubungan dengan pemberian umpan balik dan pemberian latihan soal/review. Hal ini diperkuat oleh Flavel (dalam Resnick 1981:41) yang menyatakan bahwa dalam hirarki belajar “ketrampilan yang diperoleh pada permulaan belajar dapat mempengaruhi proses belajar selanjutnya”. Demikian juga Bodner (dalam Kemendikbud 2012:7) menyatakan: “*Piaget argued that knowledge is constructed as the learner strives to organize his or her experiences in terms of preexisting mental structure or schema.*” Artinya, Piaget berargumentasi bahwa pengetahuan terbangun disaat siswa berusaha untuk mengorganisasikan pengalamannya sesuai dengan struktur kognitif yang dimilikinya.

Dalam rancangan pembelajaran tentang pengenalan konsep bilangan bulat misalnya, guru dapat mengawalinya dengan curah pendapat tentang konsep bilangan bulat positif dan bilangan bulat negatif dengan siswa. Misalnya mengajukan pertanyaan “Ada di antara kalian yang dapat menunjukkan mana contoh bilangan bulat positif atau bilangan bulat negatif disekitar kita?”. Jika siswa kebingungan dengan pertanyaan tersebut, guru dapat memperlihatkan gambar yang sudah dikenal siswa yang menunjukkan ketinggian dan kedalaman suatu benda. Misalnya tinggi katrol dan kedalaman timba dari sebuah sumur, tinggi layar dan kedalaman jangkar dari sebuah kapal yang sedang berlabuh. Ketinggian menunjukkan bilangan bulat

positif sedangkan kedalaman menunjukkan bilangan bulat negatif. Andaikan tinggi katrol 2m dan kedalaman timba 5m maka bilangan bulat yang bersesuaian adalah  $+2$  untuk ketinggian katrol dan  $-5$  untuk kedalaman timba. Mengukur ketinggian dan kedalaman adalah kegiatan yang saling berlawanan arah yaitu ke atas (dari permukaan tanah) dengan tanda positif dan ke bawah (dari permukaan tanah) dengan tanda negatif atau arah kanan (dari nol) dengan tanda positif dan arah kiri (dari nol) dengan tanda negatif.

Komponen kedua adalah bagaimana **bahasa** digunakan untuk mendorong terjadinya pemahaman. Dalam matematika, bahasa bisa bersifat umum maupun khusus yang diperlukan untuk menyajikan ide-ide matematika. Bahasa juga berhubungan dengan pedagogik khusus karena penting bagi guru untuk memodelkan bahasa yang benar yang dapat difahami siswa agar siswa dapat menggunakan bahasa yang benar untuk mendeskripsikan pemahamannya kepada guru atau teman-temannya untuk menjelaskan dan memperkuat pemahamannya. Hal ini diperkuat oleh Sutawidjaya (2002:5) mengatakan bahwa “bahasa merupakan unsur penting dalam setiap pembelajaran. Bisa terjadi siswa tidak memahami suatu konsep matematika bukan karena konsep itu terlalu sulit baginya tetapi karena guru yang menyajikan menggunakan kata atau kalimat yang tidak bisa dimengerti oleh siswa”. Oleh karena itu, penyajian pembelajaran yang dilakukan guru matematika hendaknya menggunakan bahasa sederhana yang dapat difahami siswa. Bahasa sangat berkaitan erat dengan interaksi sosial sehari-hari termasuk dalam

proses pembelajaran. Urgensinya bahasa dalam pembelajaran digambarkannya sebagai “limas ajaib” seperti berikut.



Keterangan: B = bahasa  
 M= matematika,  
 S = simbol (wujud simbol)  
 K = konkret (nyata/konkret)  
 G = gambar (semi konkret)  
 D = diagram (semi abstrak)

Berdasarkan uraian tersebut maka bahasa adalah hal penting yang perlu diterapkan guru dalam proses belajar mengajar. Misalnya  $+2 + ^-5 = \dots$ . Kalimat tersebut dapat dibahasakan dengan menggabung dua bilangan positif dengan lima bilangan negatif. Demikian juga halnya dengan  $+2 - ^-5 = \dots$ . Kalimat tersebut dapat dibahasakan dengan mengambil lima bilangan negatif dari dua bilangan positif. Untuk mewujudkan hal tersebut maka diperlukan representasi benda nyata atau gambar dari benda nyata.

Komponen ketiga berhubungan dengan penggunaan **representasi visual (gambar)** dalam menyajikan ide-ide. Gambar merupakan aspek kritis dari matematika. Gambar sering digunakan untuk membantu menjembatani pemahaman siswa dan menyiapkan rangsangan guna menyelesaikan tugas matematika sebelum

pengenalan symbol. Hal ini diperkuat oleh Bruner (dalam Russeffendi, 1991:109) mengemukakan bahwa untuk mendapatkan pemahaman dalam proses belajar matematika sebaiknya kegiatan siswa diarahkan melalui 3 cara yaitu enaktif, ikonik dan simbolik. Cara **enaktif** yaitu untuk mendapatkan pemahaman siswa secara langsung terlibat memanipulasi obyek (benda nyata), cara **ikonik** yaitu untuk mendapatkan pemahaman, siswa melakukan kegiatan yang berhubungan dengan mental yang merupakan gambaran dari obyek-obyek yang dimanipulasinya (menjelaskannya dengan gambar), sedangkan cara **simbolik** yaitu untuk mendapatkan pemahaman, maka kegiatan yang dilakukan siswa adalah memanipulasi simbol-simbol atau lambang-lambang dari obyek tertentu. Pada kegiatan ini siswa sudah mampu menggunakan notasi tanpa ketergantungan dengan obyek (benda) nyata.

Untuk memudahkan pemahaman siswa tentang penjumlahan pada soal  $+2 + ^-5 = \dots$ , guru dapat meminta siswa untuk memperagakannya dengan gambar misalnya gambar keping positif dan gambar keping negatif. Namun, guru perlu menjelaskannya seperti berikut, “Anak-anak, sebelum kalian memperagakan penjumlahan atau pengurangan dua bilangan bulat menggunakan keping positif dan keping negatif, fahamilah ketentuan berikut:

- = + 1
- = - 1
- = 0

**Catatan:** apabila keping positif digabung dengan keping negatif maka nilainya nol (0) Perhatikan!.

Beberapa cara menyatakan bilangan bulat dengan keping.

$$\begin{array}{l} \bullet\bullet \\ \circ\circ\circ = -1 \\ \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \\ \circ\circ\circ = +2 \\ \bullet\bullet\bullet \\ \circ\circ\circ = 0 \end{array}$$

Berdasarkan penjelasan tersebut maka peragaan  $+2 + -5$  dapat dilakukan dengan cara menggabung dua keping positif dengan lima keping negatif sehingga tampak seperti berikut.

$$\begin{array}{l} \bullet\bullet \\ \circ\circ\circ\circ\circ = \circ\circ\circ \end{array}$$

Jadi  $+2 + -5 = -3$

Untuk pengurangan  $+2 - -5 = \dots$  peragaannya tidak dapat dilakukan secara langsung, tetapi perlu dimodifikasi terlebih dahulu. Karena kalimatnya “mengambil lima keping negatif dari dua keping positif” maka bilangan positif dua dimodifikasi sehingga memungkinkan untuk mengambil lima keping negatif seperti berikut.

$$\begin{array}{l} \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \\ \circ\circ\circ\circ\circ = +2 \end{array}$$

Peragaan tersebut memungkinkan untuk mengambil lima keping negatif, seperti berikut.

$$\begin{array}{l} \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \\ \circ\circ\circ\circ\circ \end{array} \rightarrow \text{Diambil lima keping negatif}$$

Keadaan keping setelah diambil lima keping negatif menjadi tujuh keping positif seperti berikut.

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

Jadi  $+2 - -5 = 7$ .

Komponen keempat adalah penggunaan **Simbol** yang berkenaan dengan penyajian ide-ide matematika. Komponen ini membuat matematika berbeda dengan disiplin ilmu lainnya dan kadang-kadang

merujuk ke bahasa yang universal. Hal ini diperkuat oleh Bruner (dalam Russeffendi, 1991:109) mengemukakan bahwa untuk mendapatkan pemahaman dalam proses belajar matematika sebaiknya kegiatan siswa diarahkan melalui 3 cara yaitu enaktif, ikonik dan simbolik. Cara simbolik yaitu untuk mendapatkan pemahaman, maka kegiatan yang dilakukan siswa adalah memanipulasi simbol-simbol atau lambang-lambang dari obyek tertentu. Pada kegiatan ini siswa sudah mampu menggunakan notasi tanpa ketergantungan dengan obyek (benda) nyata. Pada contoh  $+2 + -5 = \dots$  guru tidak lagi mengarahkan siswa untuk meragakannya dengan memanipulasi benda nyata atau gambar tetapi memberi pemahaman siswa tentang definisi atau sifat-sifat penjumlahan bilangan bulat. Untuk mendapatkan pemahaman tentang definisi dan sifat-sifat tersebut guru hendaknya memberi kesempatan siswa untuk mengamati dan mencermati pola-pola penjumlahan bilangan bulat seperti Tabel 1 berikut.

Perhatikan penjumlahan bilangan bulat berikut:

$$\begin{array}{l} +3 + +3 = +6 \\ +3 + +2 = +5 \\ +3 + +1 = +4 \\ +3 + 0 = \dots \\ +3 + -1 = \dots \\ +3 + -2 = \dots \end{array}$$

Berkurang satu  
Berkurang satu

Siapa yang bisa melengkapi ... pada pertanyaan di atas?

Setelah kalian menyelesaikan pola pada **Tabel-1**, lanjutkan untuk mencermati dan melengkapi pertanyaan pada **Tabel-2** berikut.

Lengkapi kalimat berikut :

$$+3 + -1 = \dots$$

$$+2 + -1 = \dots$$

$$+1 + -1 = \dots$$

$$0 + -1 = \dots$$

$$-1 + -1 = \dots$$

Setelah siswa mencermati pola bilangan pada tabel tersebut guru dapat menanyakan kesimpulan apa yang dapat kalian sampaikan?. Sifat apa yang dimiliki penjumlahan bilangan bulat?. Untuk mendorong siswa memahami definisi dan sifat-sifat penjumlahan, guru hendaknya mengarahkan pertanyaan seperti berikut.

1. Apa yang dapat kalian katakan kalau bilangan bulat dijumlahkan dengan 0 (nol)
2. Apa yang dapat kalian katakan tentang penjumlahan dua bilangan positif?
3. Apa yang dapat kalian katakan tentang penjumlahan bilangan positif dengan bilangan negatif?
4. Apa yang dapat kalian katakan tentang penjumlahan bilangan negatif dengan bilangan positif?
5. Apa yang dapat kalian katakan tentang penjumlahan dua bilangan negatif?

Berdasarkan pola bilangan yang siswa selidiki, maka guru dapat menginformasikan definisi penjumlahan bilangan bulat sebagai berikut:

#### Definisi:

Apabila **a** dan **b** bilangan bulat :

1. Penjumlahan dengan nol.

$$a + 0 = 0 + a = a$$

2. Penjumlahan dua bilangan positif.

Apabila **a** dan **b** adalah bilangan positif maka  $a + b$  adalah bilangan cacah

3. Penjumlahan dua bilangan negatif. Apabila **a** dan **b** adalah bilangan positif (karena itu  $-a$  dan  $-b$  adalah negatif) maka  $(-a) + (-b) = -(a + b)$  dimana jumlah **a** dan **b** adalah bilangan cacah

4. Penjumlahan a positif dan a negatif.

(a) Apabila **a** dan **b** adalah positif dan  $a > b$ , kemudian  $a + (-b) = a - b$  dimana **a** dan **b** berbeda maka  $a - b$  adalah bilangan cacah

(b) Apabila **a** dan **b** adalah positif dan  $a < b$ , kemudian  $a + (-b) = -(b - a)$  dimana **a** dan **b** berbeda maka  $b - a$  adalah bilangan cacah

dari definisi penjumlahan berlaku sifat penjumlahan bilangan bulat:

Sifat-sifat penjumlahan bilangan bulat.

Jika **a**, **b** dan **c** sembarang bilangan bulat maka berlaku.

1. Sifat tertutup penjumlahan  $a + b$  atau  $a - b$  adalah bilangan bulat
2. Sifat identitas penjumlahan bilangan bulat  $a + 0 = a = 0 + a$ , berlaku untuk semua **a** dimana 0 adalah bilangan identitas penjumlahan.
3. Sifat komutatif penjumlahan bilangan bulat  $a + b = b + a$
4. Sifat asosiatif penjumlahan bilangan bulat  $(a + b) + c = a + (b + c)$



Berdasarkan definisi dan sifat-sifat tersebut maka untuk menyelesaikan  $+2 + ^{-}5 = \dots$  dapat menggunakan definisi penjumlahan bilangan bulat  $a + (-b) = -(b - a)$ . Jadi  $+2 + ^{-}5 = 2 - 5 = -(5 - 2) = -3$ . Demikian juga halnya dengan  $+2 - ^{-}5 = \dots$ , dapat menggunakan definisi “mengurangkan suatu bilangan sama dengan menjumlahkan dengan lawannya”. Jadi  $+2 - ^{-}5 = +2 + ^{+}5 = 7$ .

Komponen kelima adalah **aplikasi**. Liebeck, P memperluas kerangka kerja ELPSA dengan aplikasi dimana tahapan ini menggambarkan bagaimana pengetahuan yang telah diperoleh dapat diterapkan dalam bermacam-macam situasi. Dengan demikian kerangka kerja pembelajaran ini adalah kerangka pembelajaran yang memberi kesempatan siswa untuk mampu mengkomunikasikan (menggunakan bahasa) dalam mendeskripsikan pengalaman, menyajikan pengalamannya dengan gambar, menyatakan pengalaman secara umum dengan simbol, dan mengaplikasikan pengetahuannya dalam menyelesaikan masalah-masalah dari berbagai situasi.

Untuk mengungkap tingkat keterlibatan dan pemahaman siswa penulis mengaitkannya dengan teori pemahaman yang dikemukakan Piaget dan Garcia (dalam Baker, 2000:558) ” yang menyatakan bahwa pengetahuan tumbuh mengikuti mekanisme tertentu yang berkembang dalam tiga tahap (disebut *triad*) dimana tahap pertama dari *triad* adalah **tahap intra**, tahap kedua adalah **tahap inter** dan tahap ketiga adalah **tahap trans**.

**Tahap intra** adalah kemampuan seseorang menginteriorisasi sesuatu aksi (konkret atau semi konkret/gambar) menuju

suatu proses. Dalam hal ini Dubinsky (dalam Zazkis, 1996) seperti yang dikutip (Arifin, 2002:13) menyatakan bahwa *tahap intra* adalah kemampuan seseorang menggunakan bahasa atau menjelaskan kembali sesuatu yang telah dilakukannya (Aksi). Kejadian seperti ini dikatakan bahwa pemahaman seseorang telah berada pada *tahap intra*.

**Tahap inter** adalah kemampuan seseorang melakukan enkapsulasi sesuatu kedalam skema nya menjadi kemampuan menghubungkan sesuatu dengan yang lain.

**Tahap trans** adalah kemampuan seseorang melakukan tematisasi sesuatu kedalam skemanya menjadi kemampuan mengaitkan hubungan khusus dengan pengetahuan atau keterampilan lain. Apabila pengetahuan siswa telah berada pada *tahap trans* maka dikatakan bahwa pemahaman siswa telah terbangun dengan kerangka pembelajaran tersebut dan akan mampu mengaplikasikan pengetahuannya dalam memecahkan permasalahan yang dialami dalam kehidupannya.

Disamping itu Mardiah, dkk (dalam EDUMAT, Vol. V, 2014) menyatakan bahwa indikator pemahaman konsep matematika adalah (1) kemampuan menyatakan ulang suatu konsep, (2) kemampuan memberi contoh dan bukan contoh, (3) kemampuan menyajikan konsep dalam berbagai bentuk representasi matematis, (4) kemampuan menggunakan, memanfaatkan, dan memilih prosedur tertentu, dan (5) kemampuan mengaplikasikan konsep atau algoritma pada pemecahan masalah.

Berdasarkan uraian tersebut, maka pengaitan kerangka kerja ELPSA dengan teori pemahaman yang dikemukakan Piaget

dan Garcia (dalam Baker, 2000:558) dan Mardiah dkk (dalam EDUMAT, Vol. V, 2014) adalah apabila siswa menggunakan bahasa yang merepresentasikan pengalamannya dan mampu menjelaskan setelah melakukan representasi gambar dan simbol maka berarti siswa telah memahami konsep atau struktur matematika yang telah dipelajarinya. Kemampuan menyatakan kembali suatu konsep atau memberi contoh dan bukan contoh dikatakan telah berada pada tahap **intra**. Misal  $+2 + ^{-}5 = \dots$ . Siswa yang pemahamannya berada pada tahap intra, akan dapat menjelaskan bahwa penjumlahan adalah penggabungan.  $+2 + ^{-}5 = \dots$  adalah menggabung dua keping positif dengan lima keping negatif sehingga hasil penggabungannya ada tiga keping negatif. Jadi  $+2 + ^{-}5 = ^{-}3$

Apabila siswa mampu membuat hubungan antar konsep, menyajikan konsep dalam berbagai bentuk representasi matematis, atau kemampuan menggunakan, memanfaatkan, dan memilih prosedur tertentu dalam menyelesaikan masalah matematika dikatakan telah berada pada tahap **inter**. Misal  $+2 + ^{-}5 = \dots$ . Siswa yang pemahamannya berada pada tahap inter, akan mampu membuat hubungan penjumlahan tersebut dengan definisi atau sifat-sifat penjumlahan sehingga  $+2 + ^{-}5 = \dots$  akan dihubungkan dengan definisi  $a + (-b) = -(b - a)$ . Dengan demikian  $+2 + ^{-}5 = \dots$  ditulis menjadi  $+2 + ^{-}5 = 2 - 5 = -(5 - 2) = -3$ . Jadi  $+2 + ^{-}5 = ^{-}3$ .

Selanjutnya apabila siswa mampu mengaplikasikan pengetahuannya dalam memecahkan permasalahan yang dialami dalam kehidupannya atau mengaplikasikan konsep atau algoritma pada pemecahan

masalah maka pemahaman siswa telah berada pada tahap **trans**.

### **Simpulan dan Saran**

1. Kerangka kerja ELPSA adalah sebuah model rancangan pembelajaran sebagai acuan guru dalam merancang rencana pembelajaran (*lesson plan*), yang memberi kesempatan siswa untuk mengungkapkan pengalaman belajarnya (*Experience*), menggunakan bahasa untuk mendeskripsikan pengalaman (*Language*), visualisasi gambar untuk menyajikan pengalaman (*Picture*), simbolisasi tertulis untuk menyatakan pengalaman secara umum atau bersifat general (*Symbol*), dan (*Aplication*) sebagai penerapan pengetahuan yang telah diperoleh dalam memecahkan berbagai macam situasi.
2. Kerangka kerja ELPSA dapat digunakan untuk menilai pemahaman siswa sebagai aplikasi dari kemampuan **bahasa** untuk mengungkapkan atau menjelaskan kembali sesuatu yang telah dilakukannya (**visualisasi gambar**), (2) mampu memberi contoh dan bukan contoh, (3) mampu menyajikan konsep dalam berbagai bentuk representasi matematis (**Simbol**), (4) mampu menggunakan, memanfaatkan, dan memilih prosedur tertentu (**Simbol**), dan (5) mampu mengaplikasikan konsep atau algoritma pada pemecahan masalah (**Aplikasi**).

### **Daftar Pustaka**

- Arifin. 2002. *Membangun Pemahaman Siswa kelas V Sekolah Dasar tentang Konsep Pengurangan Bilangan Bulat*

- Menggunakan Material Manipulatif*. Tesis tidak dipublikasikan. Malang: PPS UM
- Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. 2000. A Calculus Graphing Schema. *Journal For Research in Mathematics Education*. 31(2): 557-578.
- Etcberger dan Shaw, 1992. *Teaching change as A progressing of Teacher*. *Journal For Research in Mathematics Education*. 92(8).
- Kemendikbud. 2012. *Teori Belajar Matematika*. Modul Penguatan Kompetensi Matematika Pasca UKA. Jakarta.
- Kemendikbud. 2013. Standar Proses. Jakarta.
- Mardiah, dkk. 2014. Pemahaman Konsep Siswa Pada Materi Pertidaksamaan Linear Satu Variabel Menggunakan Pendekatan Saintifik di Kelas VII SMP Negeri 9 Palembang. *Jurnal Edukasi Matematika Vol. 5 Nomor 10 Tahun 2014*:631-635. PPPPTK Matematika Jogjakarta.
- Resnick, L.B & Ford, W.W. 1981. *The Psychology of Mathematics For Instruction*. University of Pittsburgh.
- Ruseffendi, E.T., dkk. 1991. *Pendidikan Matematika 3*. Departemen Pendidikan dan Kebudayaan. Proyek Penyetaraan Guru SD Setara D-II. Jakarta.
- Ruseffendi, E.T., dkk. 1996. *Pendidikan Matematika III*. Depdikbud Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi. Proyek Pengembangan Lembaga Pendidikan Tenaga Kependidikan. Jakarta.
- Sutawidjaya Akbar. 2000. *Pembelajaran Matematika Di Sekolah Dasar*. Makalah seminar Nasional di Universitas Negeri Malang. Malang.
- Tom Lowre & Sitti Maesuri. 2015. *ELPSA-Kerangka Kerja Pengembangan Pembelajaran Matematika*. Dipresentasikan pada Workshop ELPSA di IKIP Mataram.
- Zazkis, R & Campbell, S. 1996. Divisibility and Multiplicative Structure of Natural Numbers. Preservice Teachers Understanding. *Journal For Research in Mathematics Education*. 27(5): 540-563.